Elektrostatické pole vo vákuu

Elektrostatické pole vo vákuu *- definícia.*
Elektrický náboj*, jednotka.* ***Coulombov zákon****.*
Intenzita poľa*, jej význam, jednotka, zákon superpozície.*
Definícia siločiary a jej význam.
Tok vektora intenzity, Gaussova veta.
Práca síl v elektrickom poli, ***potenciálna energia*** *poľa.*
Potenciál poľa*, definícia, jednotka,* ***napätie*** *v poli.*
Súvislosť intenzity a potenciálu.

Elektro statické pole vo vákuu

Elektrický náboj

Elektrický náboj Q,q

Jednotka elektrického náboja:

C ... *Coulomb*
1C = 1As

Vlastnosti el. náboja:

Polarita	+ kladná - záporná
Sily	Príťažlivé – nesúhlasné náboje Odpudivé – súhlasné náboje

Kvantovanie náboja: ľubovoľný náboj je celistvým násobkom elementárneho náboja

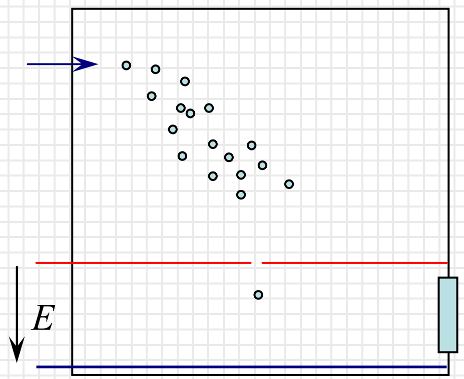
e = *1,602.10^{-19}C*

Zákon zachovania náboja: v izolovanej sústave sa celkový el. náboj zachováva

El. náboj je viazaný na materiálne objekty – na elementárne častice, tie sa nazývajú nosičmi el. náboja

Elektrický náboj

Milikanov experiment
(na kvantifikovanie veľkosti náboja, 1909,
Robert Milikan, Harvey Fletcher)



Olejové guličky boli nabíjané RTG žiarením. Pri istom náboji došlo k rovnováhe elektrickej a gravitačnej sily a častica sa vznášala. Zmerali z toho veľkosť náboja približne rovnú e (s 1% chybou) a predpovedali, že sa jedná o náboj elektrónu.

Náboj rozložený v objeme

Spojite rozložený náboj

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$ ... Objemová hustota náboja

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$ ... Plošná hustota náboja

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$ ... Dĺžková hustota náboja

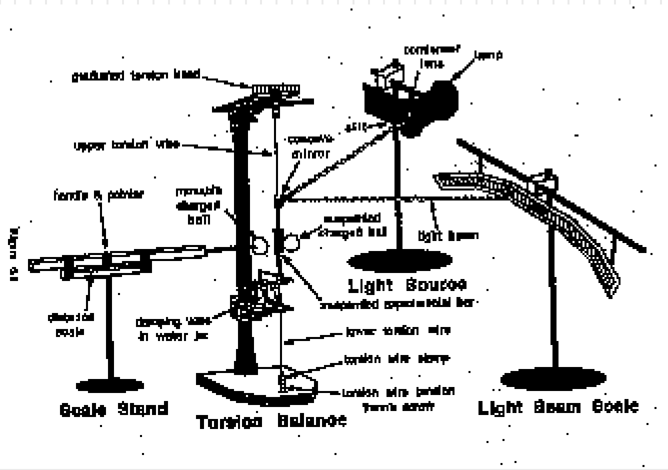
Celkový náboj v v objeme, ploche a čiare je:

$$\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}V \qquad Q = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

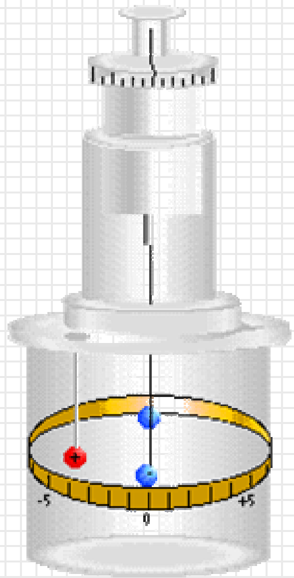
$$\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}S \qquad Q = \int_S \sigma \mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}Q = \lambda \mathrm{d}l \qquad Q = \int_l \lambda \mathrm{d}l$$

Coulombov zákon



Pokus na torzných váhach
Ch. A. Coulomb 1785



$F \sim Q, q$
$\sim 1/r^2$

$$\boxed{F = k\frac{Qq}{r^2}}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

Pozn. r>>rozmery nabitých častíc

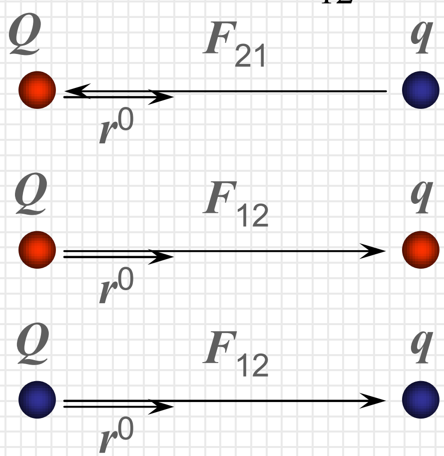
ε_0 ... permitivita vákua, elektrická konštanta
(ε_0 = 8,854.10^{-12}m^{-3}kg^{-1}A^{2}s^4 alebo Fm^{-1})

$$\boxed{\boldsymbol{F} = k\frac{Qq}{r^2}\boldsymbol{r}^0}$$

$\boldsymbol{r}^0$ ... jednotkový vektor

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\frac{q_1 \mathrm{d}q_2}{r^2}\boldsymbol{r}^0}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$



Orientácia vektorov v prípade priťahovania a odpudzovania

Určenie pomeru gr. a el. sily z CZ

Porovnanie veľkosti gravitačnej a elektrickej interakcie protónu a elektrónu

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_p q_e}{r^2} \quad F_g = \kappa\frac{m_p m_e}{r^2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\frac{e^2}{m_p m_e}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9.10^9\,Nm^2/C^2}{6{,}7.10^{-11}\,Nm^2/kg^2}\frac{\left(1{,}6.10^{-19}\,C\right)^2}{1{,}7.10^{-27}\,kg.9{,}1.10^{-31}\,kg} \approx 2.10^{39}$$

Z toho vyplýva silná elektrostatická interakcia. Čo potom drží jadro s protónmi pohromade?

Odpoveď: jadrové sily, sily krátkeho dosahu, ale ešte väčšie Ale napr. veľké jadrá s veľkým prot. číslom sú nestabilné.

Intenzita elektrického poľa, superpozícia

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}}$$

$$[\boldsymbol{E}] = NC^{-1} = Vm^{-1} = mkgs^{-3}$$

v radiálnom poli

$$F = k\frac{Qq}{r^2} \qquad \boxed{\boldsymbol{E} = k\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{r}^0}$$

$$\boldsymbol{E} = f(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\boldsymbol{E} = f(t) = konšt. \quad \text{stacionárne}$$

$$\boldsymbol{E} = f(\boldsymbol{r}) = konšt. \quad \text{homogénne}$$

Superpozícia

ak je pole vytvárané viacerými nábojmi, výsledná sila pôsobiaca na náboj q, resp. výsledná intenzita , je daná vektorovým súčtom jednotlivých síl, resp. intenzít polí od jednotlivých nábojov.

$$\boldsymbol{E} = k\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2}\boldsymbol{r}_i^0 = \sum_i \boldsymbol{E}_i$$

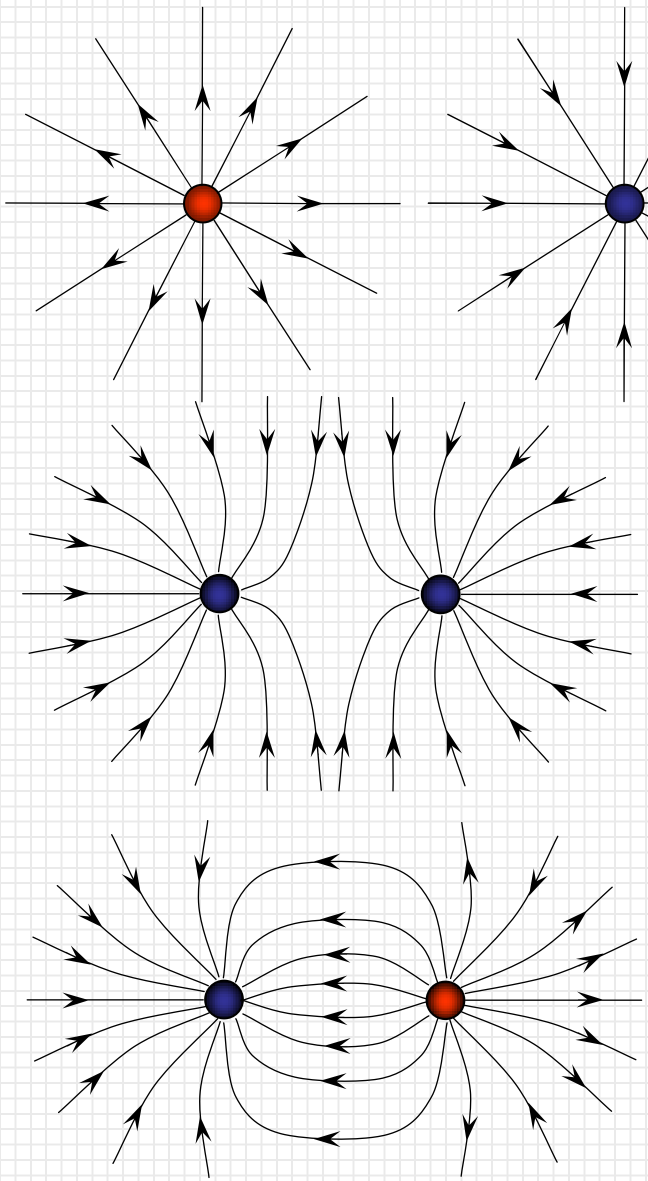
V prípade spojite rozloženého náboja na ploche

$$\boldsymbol{E} = k\int_S \frac{\sigma}{r^2}\mathrm{d}S\boldsymbol{r}^0$$

V prípade spojite rozloženého náboja v objeme

$$\boldsymbol{E} = k\int_V \frac{\rho}{r^2}\mathrm{d}V\boldsymbol{r}^0$$

Siločiary (1)

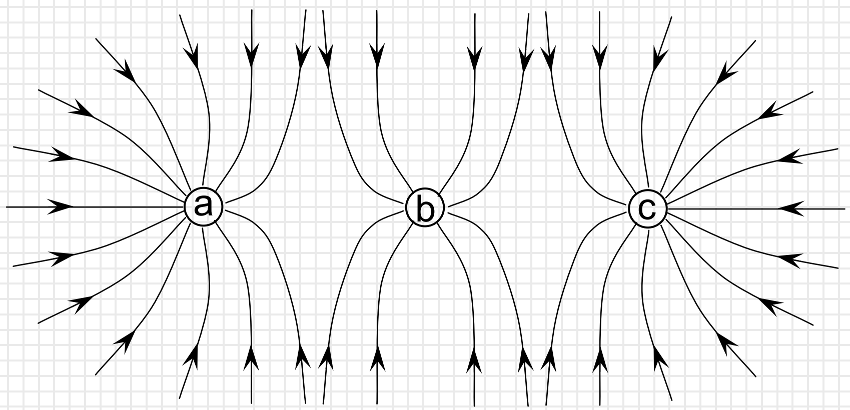


Základná charakteristika siločiar el. poľa:

-dotyčnica k siločiare v každom bode určuje smer vektora intenzity poľa v tomto bode

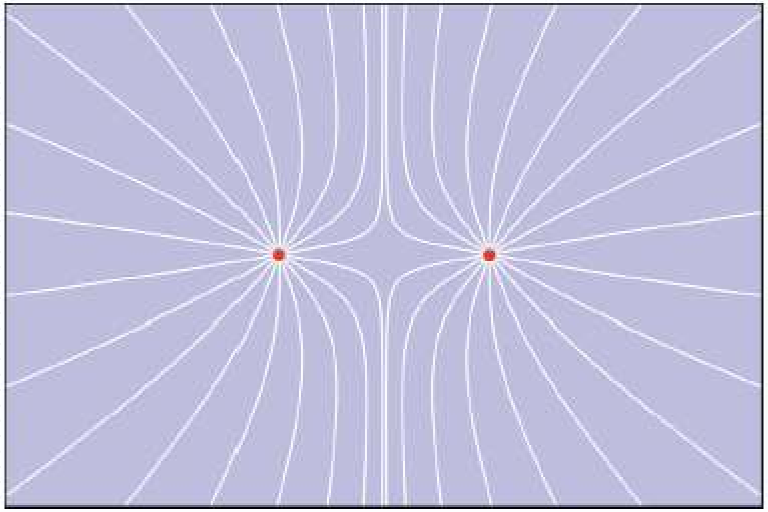
-počet siločiar na jednotku prierezu (kolmo k siločiaram) je úmerný veľkosti intenzity poľa

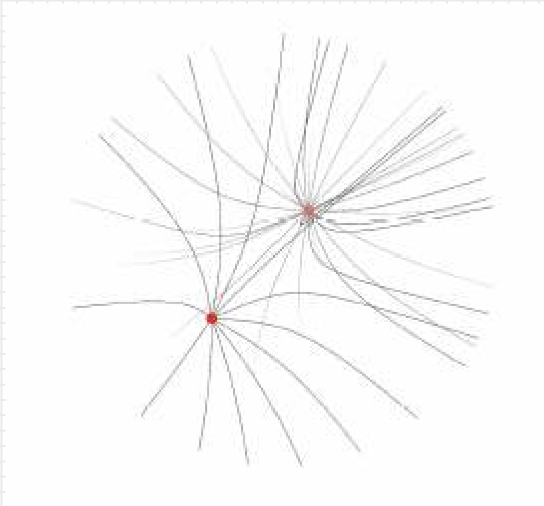
-siločiary majú počiatok na kladných nábojoch a končia na záporných nábojoch + → -

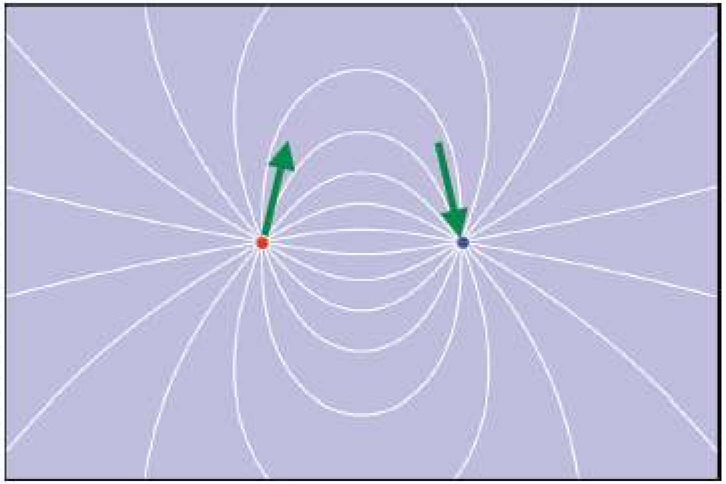


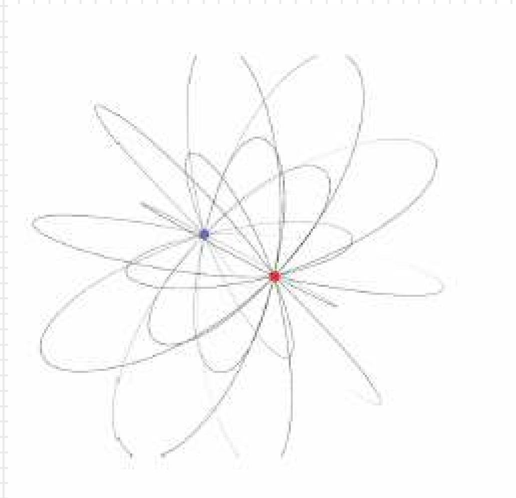
Identifikujte náboje a, b, c

Siločiary (2)

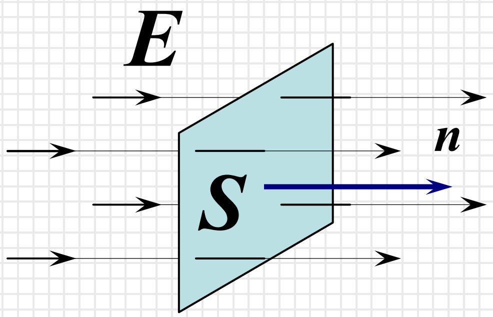




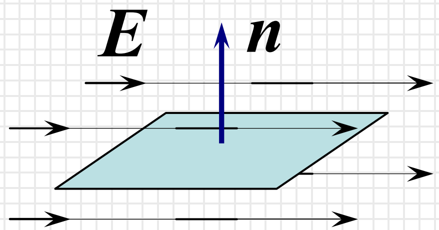




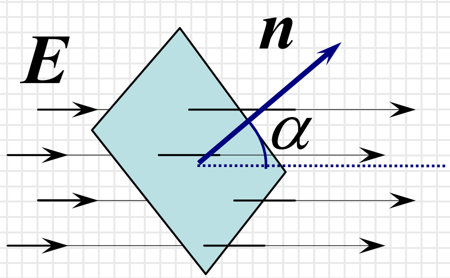
Tok vektora intenzity el. poľa



$$T = ES$$



$$T = 0$$



$$T = E\cos\alpha\, S$$

$$\boxed{T = E_n S}$$

E_n …normálová zložka intenzity k ploche S

$$T = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{n}S$$

Niekedy sa zavádza pojem plošného vektora **S**

$$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$$

$$\mathrm{d}T = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

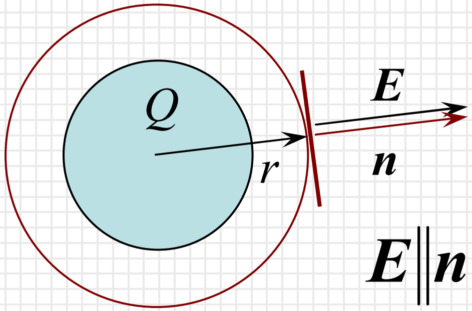
$$T = \int_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

Gaussov zákon elektrostatiky

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$T = \oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E\,4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}4\pi r^2$$

$$T = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



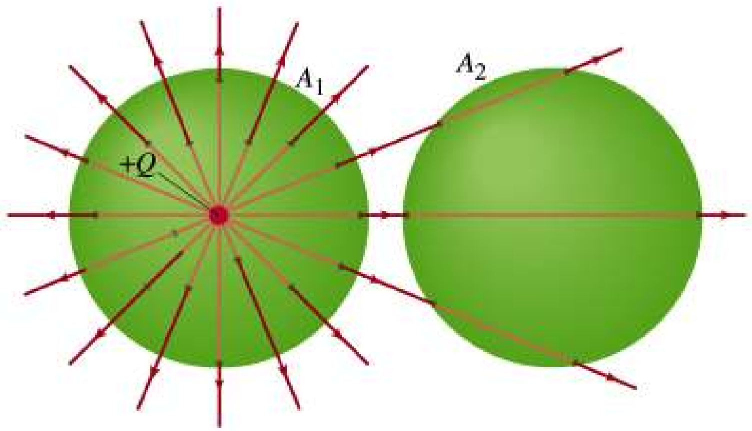
$$\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{n}$$

Gaussov zákon elektrostatiky – *tok vektora intenzity cez uzavretú plochu je rovný náboju, ktorý táto plocha uzatvára, predelenému permitivitou vákua*

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Ak je v uzavretej sústave n nábojov

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$



Vlastnosti el. poľa vyplývajúce z Gaussovho zákona

1. El. pole je pole žriedlové (siločiary vystupujú z kladných nábojov a vstupujú do záporných), napr. magn. pole žriedlové nie je.

2. Z existencie Gaussovho zákona vyplýva Coulombov zákon:

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \Rightarrow = E\oint_S \mathrm{d}S \Rightarrow = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$F = qE \Rightarrow \boxed{= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}}$$

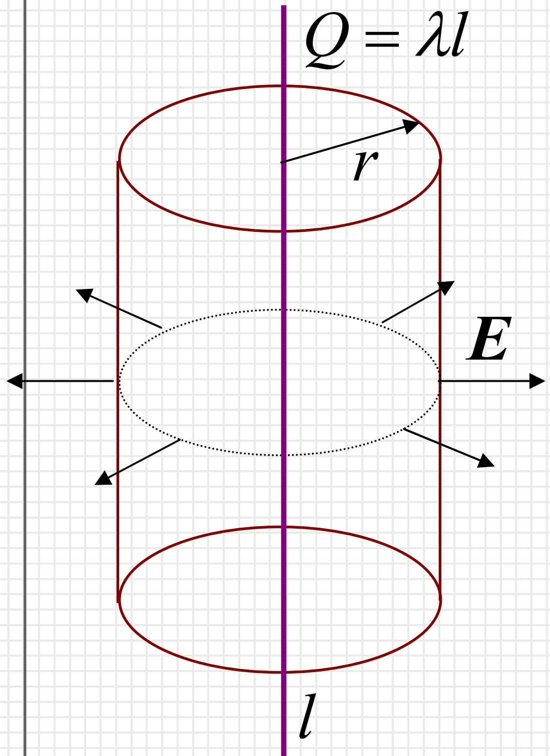
Keďže rovnako sme dokázali existenciu Gaussovho zákona z Coulombovho zákona a naopak vzniká bludný kruh „circulus vitiosus in probando“. Potom ostáva otázka, ktorý zákon je prvotný???? Za prvotný sa považuje práve Gaussov zákon.

Intenzita el. poľa pomocou Gaussovho zákona (1)

1. El. pole v okolí nabitej priamky. Stačí vytvoriť Gaussovu plochu ako valec v okolí priamky. Náboj uzavretý v tejto ploche je $Q=\lambda l$.

Po obvode plášťa je E=konšt.

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \Rightarrow = E2\pi rl = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

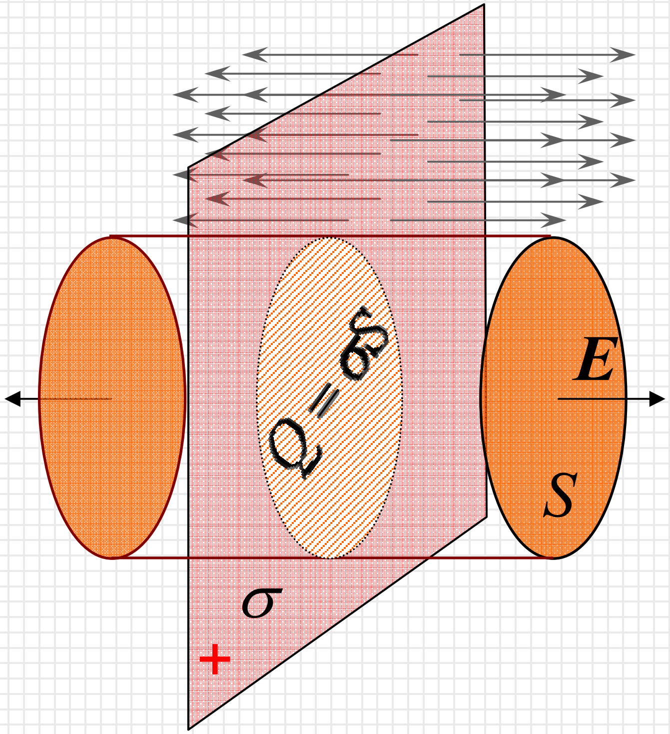


Ten istý výsledok dostaneme použitím definície E získanej z Coul. zákona. Avšak výpočet je oveľa zložitejší.

Intenzita el. poľa pomocou Gaussovho zákona (2)

2. El. pole v okolí nabitej nekonečnej roviny.

Pole siločiar v okolí kladne nabitej roviny.



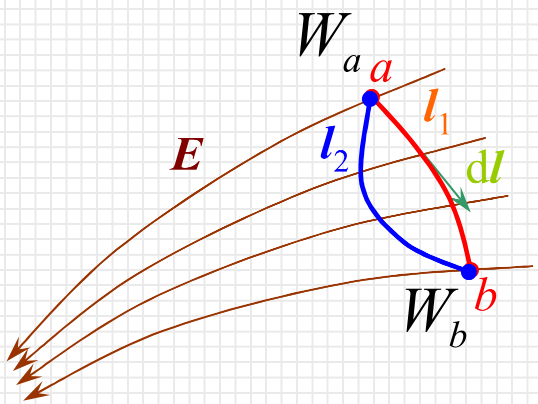
V okolí roviny je homogénne el. pole. Siločiary smerujú kolmu na rovinu. Stačí vytvoriť Gaussovu plochu ako valec v prechádzajúci rovinou. Tok vektora intenzity cez plášť takéhoto valca je nulový. Celkový tok intenzity je daný len súčtom tokov cez základne. Náboj obklopený valcom je Q=σS.

$$2SE = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Práca v elektrickom poli

$$W_{ba} = - \int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \Rightarrow = -q\int_{a}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Práca proti silám poľa



$$W_{ab} = - \int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \Rightarrow = -q\int_{b}^{a} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$W = W_{ba} + W_{ab} = -q\left(\int_{a}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{b}^{a} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right) \Rightarrow \boxed{-q\oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0}$$

V konzervatívnom poli práca nezávisí od tvaru dráhy, ale iba od začiatočnej a koncovej polohy.

$$\Rightarrow \boxed{\oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0}$$

Jeden z najdôležitejších zákonov elektrostat. poľa. Zákon nemá názov.
Zákon dokazuje, že el. pole nemá uzavreté siločiary a teda je žriedlové.

Potenciál, napätie, ekvipotenciálna hladina

$$\frac{W_{ba}}{q} = \frac{W_b}{q} - \frac{W_a}{q} \rightarrow \boxed{= -\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

Pre popis práce v elektrickom poli sa zavádza jednotka eV (elektrónvolt)

$$1eV = 1{,}602.10^{-19}C.1V = 1{,}602.10^{-19}J$$

$$\boxed{U_{ba} = V_b - V_a}$$

Napätie … rozdiel potenciálov

$$V_b = V_a - \int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad V_{a\to\infty} = 0$$

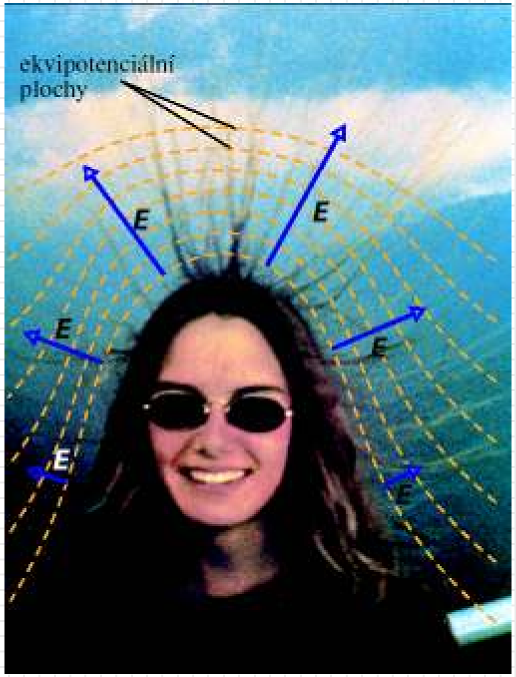
$$\boxed{[V] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}(Volt)}$$

$$W_k = -q(V_b - V_a) \quad \boxed{= qU_{ba}}$$

$$W_k = -eU$$

$$[W_k] = 1\mathrm{eV}$$

Množina bodov poľa s rovnakým potenciálom je ekvipotenciálna hladina



Potenciál v okolí bodového náboja, superpozícia

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

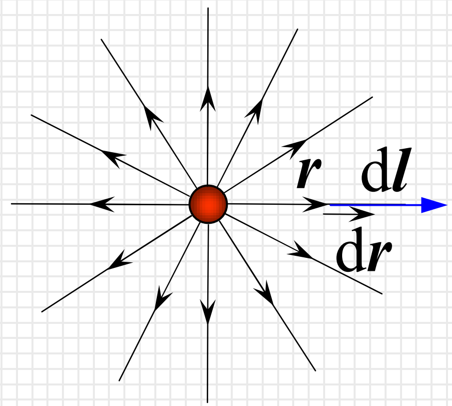
$$V(r_0) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_0}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$V(r_0) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_0}\frac{1}{r^3}r\mathrm{d}r$$

$$V(r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r_0}$$

Potenciál v radiálnom poli

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



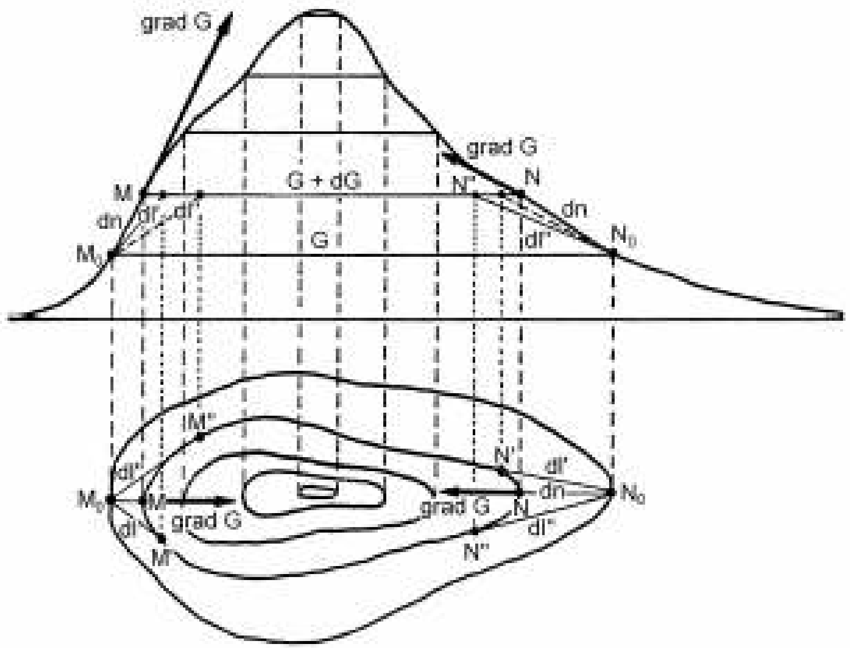
V okolí n nábojov je celkový potenciál daný superpozíciou:

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i}^{n} V(\boldsymbol{r}_i)}$$

Potenciál v danom mieste poľa je daný superpozíciou potenciálov od jednotlivých nábojov.

Gradient skalárnej funkcie, súvis intenzity s potenciálom

Gradient skalárnej funkcie $f(\mathbf{r})$ ($\mathrm{grad}\, f(\mathbf{r})$) je vektor, ktorý v danom bode skalárneho poľa udáva veľkosť a smer maximálneho nárastu funkcie $f(\mathbf{r})$.



$$U_{ba} = V_b - V_a \Rightarrow = \int_a^b \mathrm{d}V = \underbrace{-\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}V} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ \mathrm{d}V = \mathrm{grad}V.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \end{cases}$$

$$\mathrm{grad}V(x, y, z) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{k}$$

Vlastnosti elektrostatického poľa nabitého vodiča

1. Náboj privedený na vodivé teleso sa rozloží plošne na jeho povrchu.

(V dôsledku odpudzovania náboja, sa náboj vytláča na okraj. Potom je objemová hustota vo vodiči ρ=0 a na povrchu je σ≠0)

2. Intenzita el. poľa vo vnútri nabitého vodivého telesa sa rovná nule.

*(Vyplýva z bodu 1. a z Gaussovho zákona. Keďže náboj je na povrchu, tak v objeme sa nenachádza a teda $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$. Potom je zrejmé, že **E**=0. Alebo tiež z toho, že pri nenulovej intenzite by musel tiecť prúd)*

3. Vektor intenzity el. poľa na povrchu vodivého nabitého telesa má v každom bode povrchu smer normály.

*(Keby to tak nebolo, tak tangenciálna zložka **E** by spôsobovala povrchové prúdy.)*

4. Povrch vodivého telesa je ekvipotenciálnou plochou.

(Vyplýva z bodu 3, siločiary sú kolmé na ekvipotenciálne plochy)

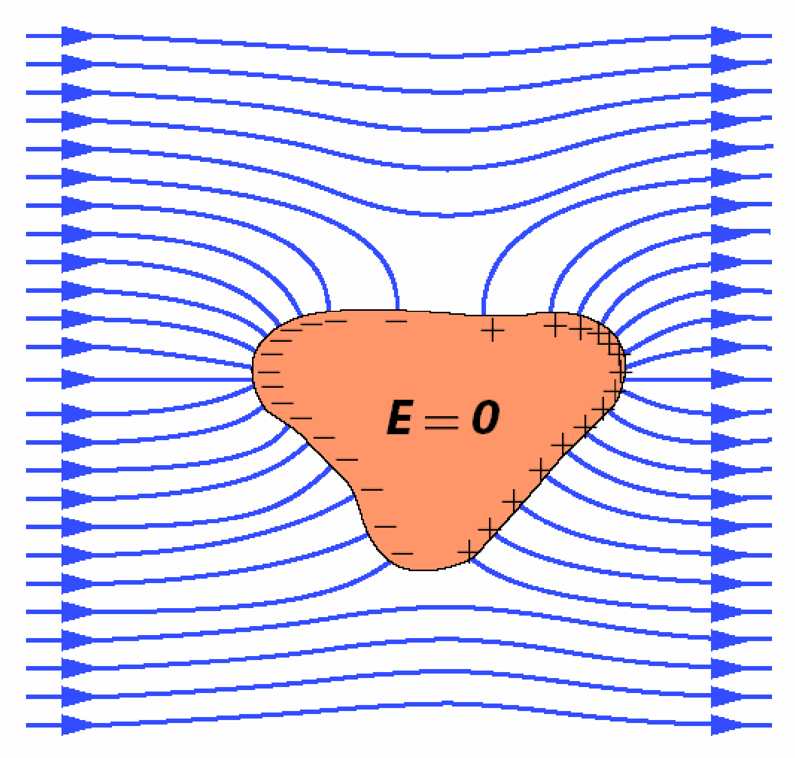
5. V každom bode objemu telesa je potenciál rovnaký.

(Rozdiel potenciálov medzi dvoma bodmi je nulový, ale na povrchu je potenciálový skok)

6. Intenzita poľa je nepriamoúmerná polomeru krivosti.

(V dôsledku rozloženia náboja je väčšia v miestach s malým polomerom krivosti)

Dôsledky vyplývajúce z Gausovho zákona



Nenabitý vodič vo vonkajšom el. poli. Náboj sa rozdelí po povrchu a zruší pole vnútri vodiča. Siločiary výsledného poľa sú kolmé na povrch.

Faradayova klietka - El. iskra neohrozila človeka v aute a preskočila cez pneumatiku do zeme.

Kapacita vodičov

Potenciál (V) poľa v **okolí bodového náboja** je úmerný veľkosti náboja (Q) a rovnako je potenciál nabitého vodiča úmerný náboju **na jeho povrchu**.

$$Q = CV \Rightarrow C = \frac{Q}{V}$$

C ... vlastná kapacita vodiča

(Náboj potrebný na to, aby sa vodič nabil na jednotkový potenciál)

$$[C] = \frac{C}{V} = m^{-2}kg^{-1}s^{4}A^{2} = F(farad)$$

Kapacita guľového vodiča

Potenciál v radiálnom poli

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 r$$

(Guľový vodič s kapacitou 1μF by musel mať polomer 9km)

Vlastná a vzájomná kapacita

Vlastná kapacita vodiča

$$C = \frac{Q}{V}$$

ako znížiť potenciál

Priblížením vodiča s opačným potenciálom

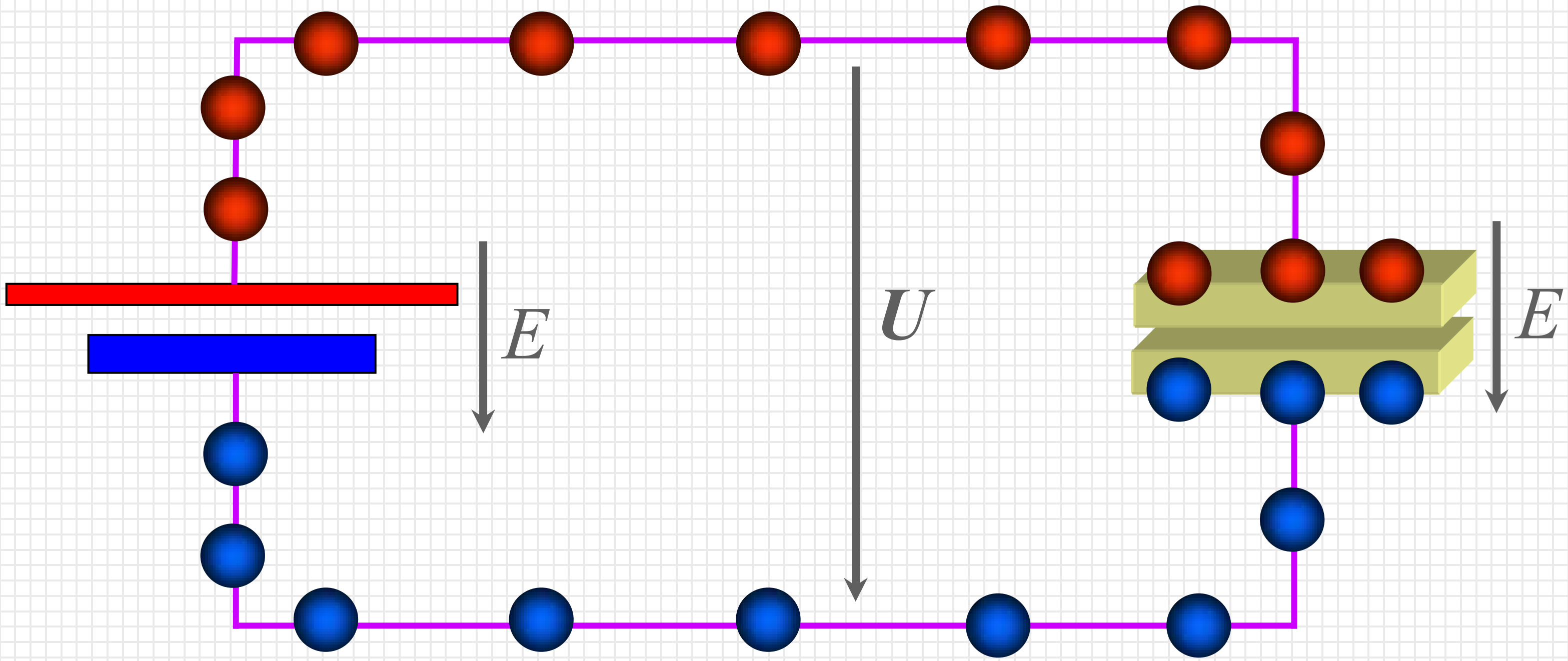
Vysvetlenie: *Podľa princípu superpozície je výsledný potenciál v danom mieste algebraickým súčtom jednotlivých potenciálov. Prítomnosťou okolitých nabitých vodičov sa náboj na prvom vodiči nezmení, zmení sa ale výsledný potenciál na jeho povrchu a tým sa zmení aj jeho kapacita. Opačný potenciál teda vyvolá zvýšenie kapacity.*

Vzájomná kapacita dvoch vodičov

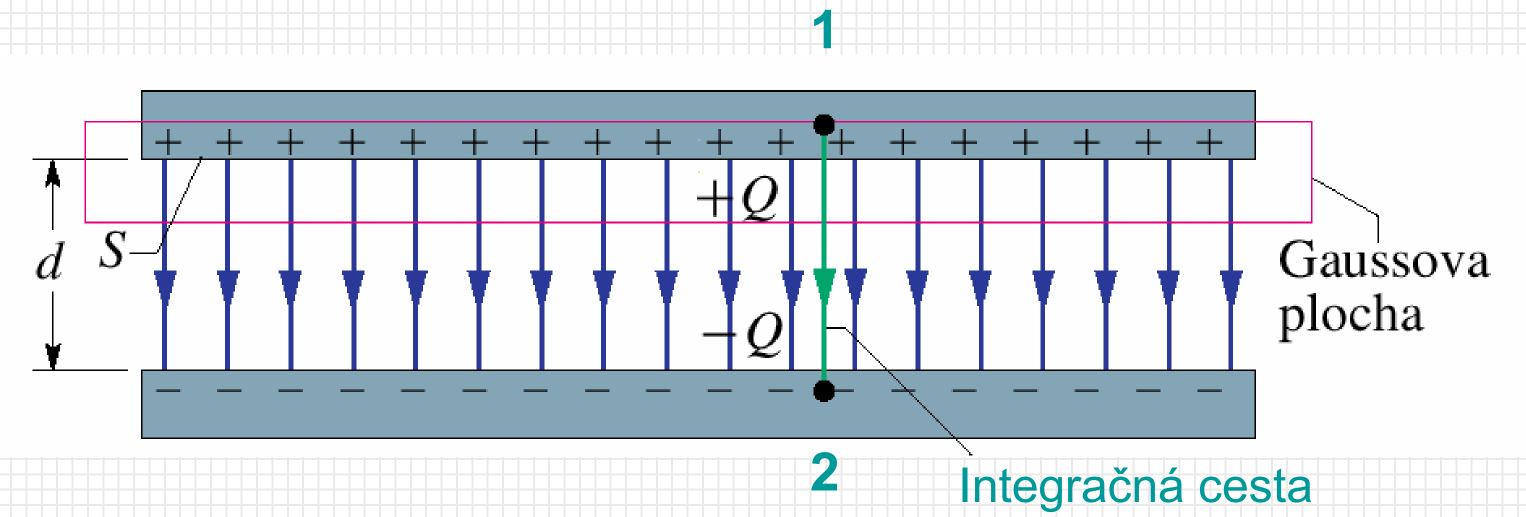
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow C = \frac{Q}{U_{12}}$$

Takáto sústava dvoch vodičov je
kondenzátor

Nabíjanie kondenzátora (demonštrácia)



Kapacita doskového kondenzátora



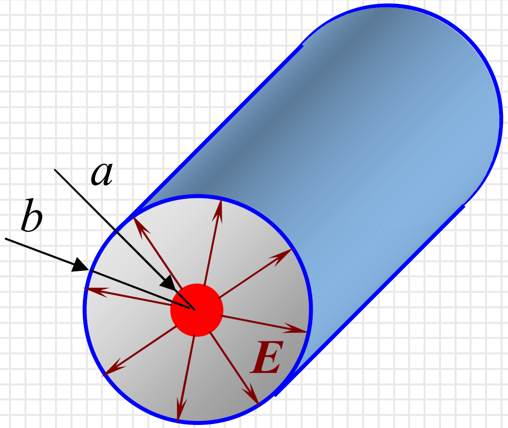
Gausova veta pre takúto sústavu

$$U_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \xrightarrow{\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{l}} = Ed \Longleftrightarrow ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$U_{12} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{Q}{U_{12}} \quad C$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

Kapacita valcového kondenzátora



Pozn. Valcové kondenzátory nemajú až také praktické uplatnenie. Výpočet je však zaujímavý pre kapacitu koaxiálnych vedení, kde je potrebné poznať kapacitu na meter dĺžky vodiča.

Za E(r) sa dosadí vzťah v okolí vodiča (str. 12) určený z Gaussovho zákona

$$U_{ab} = \int_a^b \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).\mathrm{d}\boldsymbol{r} \Rightarrow = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} \Rightarrow = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

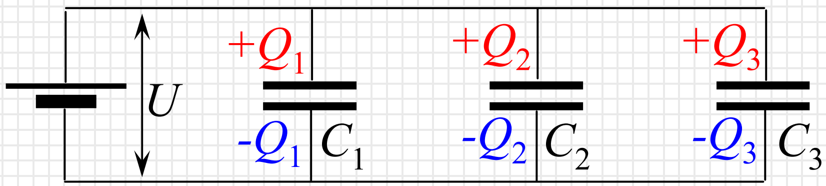
$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}}$$

Kapacita na jednotkovú dĺžku vodiča.

Spájanie kondenzátorov

Paralelné zapojenie *(U je na všetkých kondenzátoroch rovnaké)*

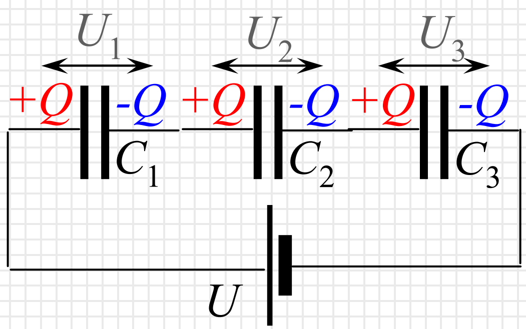
$$Q = \sum_i Q_i \Rightarrow = \sum_i U_i C_i \Rightarrow = U \sum_i C_i \Rightarrow \frac{Q}{U} = \sum_i C_i$$



$$\boxed{C = \sum_i C_i}$$

Sériové zapojenie *(Q je na všetkých kondenzátoroch rovnaké)*

$$U = \sum_i U_i \Rightarrow = \sum_i \frac{Q_i}{C_i} \Rightarrow = Q \sum_i \frac{1}{C_i} \Rightarrow \frac{U}{Q} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

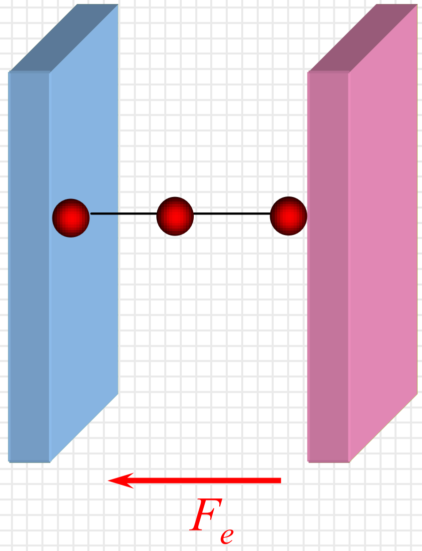
Energia sústavy vodičov

$$W_p = A = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \Rightarrow = q\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \Rightarrow = qU$$

$$\mathrm{d}W = U\mathrm{d}q \Rightarrow = q\frac{\mathrm{d}q}{C}$$

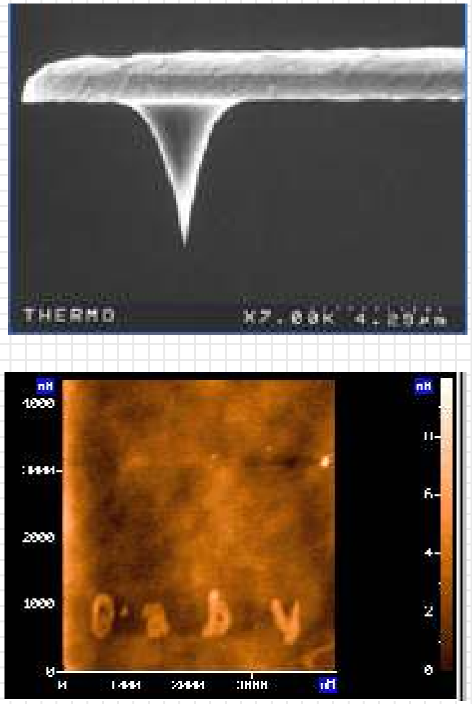
$$W = \int_0^Q \frac{q}{\mathrm{C}}\mathrm{d}q \Rightarrow = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}CU^2} \qquad \boxed{W = \frac{1}{2}QU}$$

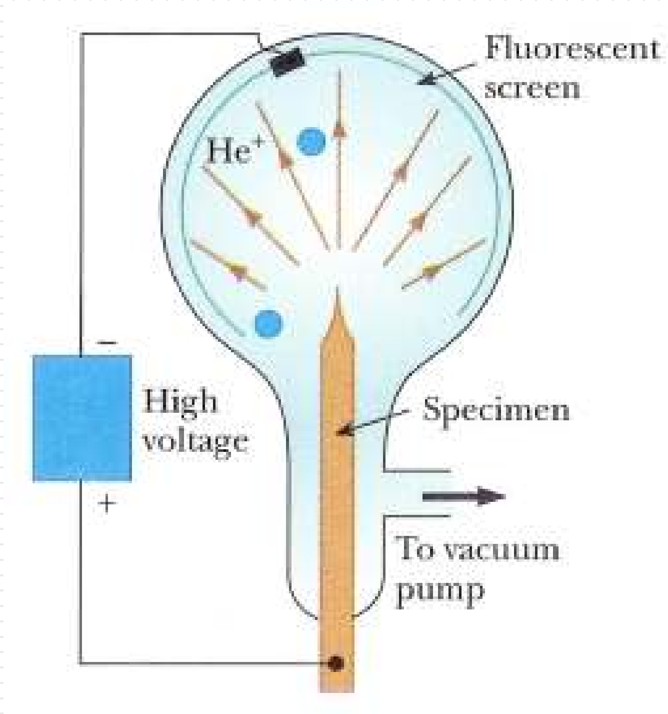


Nabíjanie kondenzátora: Na prenesenie prvého kladného náboja dQ+ nie je potrebná práca, tento však vytvorí medzi doskami kondenzátora elektrostatické pole. Pri prenášaní ďalšieho náboja dQ+ už proti pohybu pôsobí sila elektrostatického poľa.

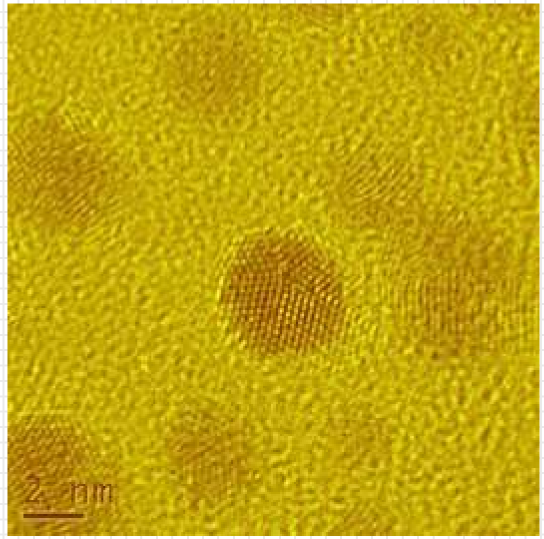
El. pole v nanotecholĂłgiĂĄch



Atomic force microscope+
AFM litography (hrot AFM)



Field ion microscope (obraz hrotu sa zobrazuje na tienĂtku)



Transmission electron microscope
(vysokĂŠ el. pole prechĂĄdza tenkou vzorkou a zobrazuje s rozliĹĄovacou schopnosĹĽou atĂłmov)